

7. Energiefunktionale

7. Energiefunktionale

7.1 Formulierung

7.2 Bayes'sche Interpretation

7.3 Energieminimierung

7 Energiefunktionale

Ziel: **Universeller Ansatz zur Formalisierung von Fusionsproblemen**

- Einführung von „Energie“termen E_k zur Modellierung der fusionsrelevanten Informationen:
 - Verfügbare Daten (A-priori-Wissen)
 - Gewünschte Eigenschaften des Fusionsresultats
 - Forderungen (Constraints) bzgl. der zu fusionierenden Daten, Zwischengrößen, Fusionsergebnisse
 - Wechselseitige Beziehungen der vorhandenen Daten
- Implizite, **kompakte Darstellung** der Fusionsaufgabe

7.1 Formulierung von Energiefunktionalen

Repräsentation der Fusionsaufgabe durch ein **Energiefunktional**:

$$E := \sum_k \lambda_k E_k, \quad \lambda_k > 0$$

- Gesamtenergie: **Gewichtete Summe** der Einzelenergien
- Berücksichtigung unterschiedlicher Relevanz durch **Vorfaktoren** λ_k
- Modellierung der Terme E_k so, dass fusionsrelevante Informationen **monoton** widergespiegelt werden:
Erwünschtere Eigenschaft \leftrightarrow geringerer Wert des Terms
- **Meist quadratische Formulierung** der Terme E_k
- **Zusatzinformationen einbeziehbar** durch entsprechende Energieterme
- Fusion durch simultane **Minimierung des Energiefunktionals** bezüglich des Fusionsresultates (Optimierungsproblem)

Problem: Keine universell anwendbare Optimierungsmethode zur Minimierung der Gesamtenergie E

7.1 Formulierung von Energiefunktionalen

Beispiel:

$$E(r) = \lambda_1 E_d(d, r) + \lambda_2 E_c(r) \quad \lambda_i > 0$$

$$= \lambda_1 \left(E_d(d, r) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} E_c(r) \right)$$

$$\propto E_d(d, r) + \lambda E_c(r)$$

$d(\mathbf{x}, \omega)$: Bilddaten (Beobachtungen)

$r(\mathbf{x})$: Fusionsergebnis

- $E_d(.,.)$: Modelliert den Zusammenhang zwischen Beobachtungen $d(\mathbf{x}, \omega)$ und Fusionsergebnis $r(\mathbf{x})$
- $E_c(.)$: Modelliert erwünschte oder a priori bekannte Eigenschaften von $r(\mathbf{x})$ (Constraints)
- $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$: Regularisierungsparameter zur Gewichtung der Einzelenergien

7.1 Formulierung von Energiefunktionalen

Beispiel: **Glättung** eines eindimensionalen beobachteten Signals

$$d(x): [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- Ansatz: **Minimierung eines Energiefunktional**s bzgl. des Resultats

$$r(x): [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$E(r) := E_d(d, r) + \lambda E_c(r)$$

$$= \int (r(x) - d(x))^2 dx + \lambda \int (\mathcal{L}\{r(x)\})^2 dx$$

\mathcal{L} : Ableitungsoperator, wähle z.B. $\mathcal{L}\{.\} = \frac{d}{dx}$.

- Struktur von E :
 - **1.Term:** Datenterm E_d
→ Resultat r soll nahe bei d liegen
 - **2.Term:** Glättungsterm E_c , Gewichtungsfaktor λ
→ Resultats r soll keine Sprünge aufweisen und möglichst kleine Ableitung besitzen
- E positiv definit und quadratisch → i.d.R. **eindeutiges Minimum**

7.1 Formulierung von Energiefunktionalen

- **Diskretisierung:** Einführung eines äquidistanten Gitters G auf $[a, b]$:

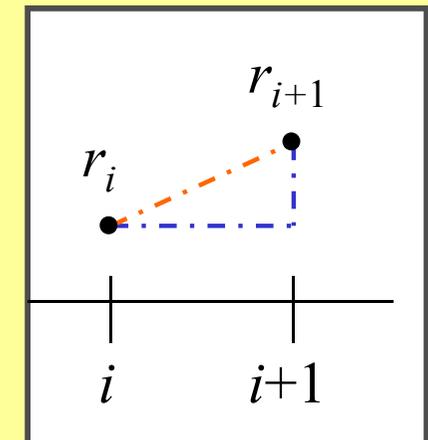
$$G = \{a + ih \mid i = 0, \dots, N\} \text{ mit } N = \frac{b-a}{h}$$

$$\mathbf{r} := (r_0, \dots, r_N)^T \text{ mit } r_i := r(a + ih), i = 0, \dots, N$$

- **Glättungsterm:** Summe der Differenzen $r_{i+1} - r_i$

- **Diskretisierte Formulierung für $E(\mathbf{r})$:**

$$E(\mathbf{r}) = \sum_{i=0}^N (r_i - d_i)^2 + \lambda \sum_{i=0}^{N-1} (r_{i+1} - r_i)^2$$



7.2 Bayes'sche Interpretation

Gibbs'sche Verteilung mit **Energiefunktional** E :

$$\pi_{\beta,E}(x) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(x)}$$

mit Z : Normierungskonstante.

$\beta = 1/T$: „inverse Temperatur“

Interpretationsmöglichkeit aus der statistischen Physik:

Es sei $E : V \rightarrow \mathbb{R}$, V endlich

V : Menge aller **Konfigurationen** eines physikalischen Systems

$E(x)$: **Energie** des Systems, wenn es sich in der Konfiguration x befindet

T : **Temperatur**

$\pi_{\beta,E}(x)$: Wahrscheinlichkeit, dass sich das System in der Konfiguration x befindet

T **groß** : Alle Konfigurationen etwa gleich wahrscheinlich

T **klein** : Konfigurationen mit niedriger Energie bevorzugt

7.2 Bayes'sche Interpretation

Definiere für E eine Gibbs'sche Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF):

$$\text{WDF} \propto e^{-\beta E} = \prod_k e^{-\frac{\lambda_k E_k}{T}}$$

Minimierung des Energiefunktionals E : $\min_{\mathbf{r}} \{E(\mathbf{r})\} \rightarrow \mathbf{r}_{\text{opt}}$

ist äquivalent zur

Maximierung der Gibbs'schen Verteilung: $\max_{\mathbf{r}} \{e^{-\beta E(\mathbf{r})}\} \rightarrow \mathbf{r}_{\text{opt}}$

Vorteile dieser Verfahrensweise:

- Multiplikation von Wahrscheinlichkeitsverteilungen statt Summation von Energiefunktionen
- Quadratische Energiefunktionen \rightarrow Gauß'sche Dichten
- Alle Optimierungsprobleme, die durch Minimierung von Energiefunktionalen erhalten werden, lassen sich in Bayes'scher Statistik ausdrücken

7.2 Bayes'sche Interpretation

Beispiel: Glättung einer eindimensionalen Funktion

Zugehörige Gibbs'sche Verteilung:

$$\begin{aligned}\Pr(\mathbf{r}|\mathbf{d}) &:= \frac{e^{-\beta E(\mathbf{r})}}{Z} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \left(\sum_{i=0}^N (r_i - d_i)^2 + \lambda \sum_{i=0}^{N-1} (r_{i+1} - r_i)^2 \right)} \\ &= \frac{1}{Z} \prod_{i=0}^N e^{-\beta (r_i - d_i)^2} \prod_{i=0}^{N-1} e^{-\beta \lambda (r_{i+1} - r_i)^2}\end{aligned}$$

Interpretation:

$$\Pr(\mathbf{r}|\mathbf{d}) \propto \Pr(\mathbf{d}|\mathbf{r}) \Pr(\mathbf{r})$$

$\Pr(\mathbf{d}|\mathbf{r})$: Bedingte Wahrscheinlichkeit für \mathbf{d} gegeben \mathbf{r}

$\Pr(\mathbf{r})$: A-priori-„Wahrscheinlichkeit“, allerdings:

$\Pr(\mathbf{r}) = \Pr(\mathbf{r} + \mathbf{c})$, $\mathbf{c} = \text{const.}$: Aussage nur über relative Werte von \mathbf{r}

$\Pr(\mathbf{r})$ ist nicht normierbar

7.3 Energieminimierung

- **Graph-Cuts-Verfahren**

Analogie: Maximum-Flow-/Minimum-Cut-Problem

- **Approximative Lösung durch sukzessive Optimierung**

Konzept: Energieterme nacheinander optimieren

- **Methode des steilsten Abstiegs**

Iteration $\mathbf{r}^{(j+1)} = \mathbf{r}^{(j)} - K \nabla E(\mathbf{r}^{(j)})$

mit Startwert $\mathbf{r}^{(0)}$, Konstante K

Zu prüfen: $E(\mathbf{r}^{(j)})$ monoton fallend in j

$$\Rightarrow E(\mathbf{r}^{(j)}) \rightarrow \min_{\mathbf{r}} E(\mathbf{r})$$

Problematisch: **Steckenbleiben in lokalem Minimum, Erkennung?**

- **Monte-Carlo-Methode**

Idee: Konfigurationen \mathbf{r} mit gleicher Wahrscheinlichkeit zufällig wählen

$$\text{Fusionsergebnis: } \mathbf{r}_{\text{opt}} = \arg \min_{\mathbf{r}} E(\mathbf{r})$$

Problematisch: Auffinden des globalen Minimums

unwahrscheinlich bei großem Suchbereich

7.3 Energieminimierung

- Simulated Annealing
- Lineare Programme
- Dynamische Programmierung
- Mean Field Theorie

Konzept: Betrachtung von Erwartungswerten anstelle Zufallsvariablen

- Clark, James J.; Yuille, Alan L.: *Data Fusion for Sensory Information Processing Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- Geiger, D.; Girosi, F.: *Parallel and deterministic algorithms from MRFs: Integration and Surface Reconstruction*. MIT AI Lab Memo No. TR-1114, Juni 1989.
- Hall, David L.; Llinas, James: *Handbook of Multisensor Data Fusion*. CRC Press, 2001.
- Beyerer, J.; Heizmann, M.; Sander, J.; Gheta, I.: *Bayesian methods for image fusion*. In: *Image Fusion: Algorithms and Applications*, Stathaki, T. (Hrsg.), Academic Press, Amsterdam, S. 157-192, 2008